第 45 講　総合問題⒀

1　2 つの箱 A，B に赤玉と白玉が入っており，箱 A の赤玉と白玉の個数の比率は $p:1-p$ $(0<p<1)$，箱 B の赤玉と白玉の個数の比率は $q:1-q$ $(0<q<1)$ であるとする．この 2 つの箱のどちらかを選び，そこから玉を 1 個取り出して色を調べてもとに戻すという操作を繰り返し行うものとする．取り出した玉が赤玉であれば次は箱 A から玉を取り出すものとし，白玉であれば次は箱 B から玉を取り出すものとする．最初は箱 A から玉を取り出すことにしたとき，第 n 回目に赤玉を取り出す確率を a_n とする．$a_1=p$ である．

(1)　a_2 を p，q を用いて表せ．

(2)　a_{n+1} を a_n，p，q を用いて表せ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$0 \leqq x \leqq 1$ において，連立不等式　$1-2x \leqq f(x)$，$x \leqq f(x)$，$f(x) \leqq 1$　を満たす２次関数 $f(x)$ で，定積分　$\int_0^1 f(x)dx$ の値が最小になるものを求めよ．またその最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　空間内に三角形 ABC と定点 O を中心とする半径 1 の球面 S とがある．点 P が S 上のすべての点を動くときの　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$　の最大値，最小値をそれぞれ M，m とするとき，次の問いに答えよ．ただし，三角形 ABC の重心 G は　$\mathrm{OG}>1$　を満たすものとする．

(1)　$M=\mathrm{AQ}^2+\mathrm{BQ}^2+\mathrm{CQ}^2$　となる S 上の点を Q，$m=\mathrm{AR}^2+\mathrm{BR}^2+\mathrm{CR}^2$　となる S 上の点を R とするとき，3 点 Q，R，G は 1 直線上にあること示せ．

(2)　$\sqrt{M-(\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)}-\sqrt{m-(\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)}$ の値は三角形 ABC の形状および位置に無関係に定まることを示し，その値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第45講　総合問題(13)

0，1，2，3，4，5　の6つの数字を重複せずに用いて，n 桁の整数を作る　($n \leqq 6$)．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$n=3$，すなわち3桁の整数で，隣り合う数字の和がどれも5にならないような整数は **アイ** 通りである．

(2)　$n=4$，すなわち4桁の整数で，隣り合う数字の和がどれも3にならないような整数は **ウエオ** 通りである．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 45 講　総合問題⒀

1　2つの箱 A，B に赤玉と白玉が入っており，箱 A の赤玉と白玉の個数の比率は $p:1-p$ $(0<p<1)$，箱 B の赤玉と白玉の個数の比率は $q:1-q$ $(0<q<1)$ であるとする．この2つの箱のどちらかを選び，そこから玉を1個取り出して色を調べてもとに戻すという操作を繰り返し行うものとする．取り出した玉が赤玉であれば次は箱 A から玉を取り出すものとし，白玉であれば次は箱 B から玉を取り出すものとする．最初は箱 A から玉を取り出すことにしたとき，第 n 回目に赤玉を取り出す確率を a_n とする．$a_1=p$ である．

(1)　a_2 を p，q を用いて表せ．

(2)　a_{n+1} を a_n，p，q を用いて表せ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　第2回目に赤玉を取り出すのは，以下のいずれかの場合である．

(i)　1回目に A から赤玉を取り出し，2回目に A から赤玉を取り出す

(ii)　1回目に A から白玉を取り出し，2回目に B から赤玉を取り出す

よって　$a_2=p\times p+(1-p)\times q=\boldsymbol{p^2+q-pq}$

(2)　第 $(n+1)$ 回目に赤玉を取り出すのは，以下のいずれかの場合である．

(i)　n 回目に赤玉を取り出し，$(n+1)$ 回目に A から赤玉を取り出す．

(ii)　n 回目に白玉を取り出し，$(n+1)$ 回目に B から赤玉を取り出す．

よって　$a_{n+1}=a_n\times p+(1-a_n)\times q$　より　$\boldsymbol{a_{n+1}=(p-q)a_n+q}$

(3)　$a_{n+1}=(p-q)a_n+q$，$a_1=p$　より

$$a_{n+1}-\frac{q}{1-p+q}=(p-q)\left(a_n-\frac{q}{1-p+q}\right)$$

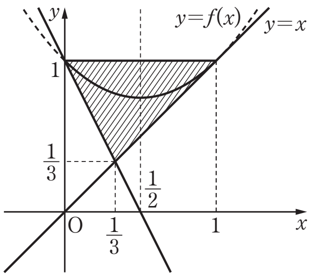
$$a_1-\frac{q}{1-p+q}=p-\frac{q}{1-p+q}=\frac{p-p^2+pq-q}{1-p+q}=\frac{(1-p)(p-q)}{1-p+q}$$

よって $a_n-\dfrac{q}{1-p+q}=\dfrac{(1-p)(p-q)}{1-p+q}(p-q)^{n-1}$　したがって $\boldsymbol{a_n=\dfrac{q+(1-p)(p-q)^n}{1-p+q}}$

2　$0\leqq x\leqq 1$ において，連立不等式　$1-2x\leqq f(x)$，$x\leqq f(x)$，$f(x)\leqq 1$　を満たす2次関数 $f(x)$ で，定積分　$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ の値が最小になるものを求めよ．またその最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。



$1-2x\leqq f(x)$ ……①　　$x\leqq f(x)$ ……②

$f(x)\leqq 1$ ……③　とする．

①，③で $x=0$ のとき

　$1\leqq f(0)$　かつ　$f(0)\leqq 1$　より　$f(0)=1$ ……④

②，③で $x=1$ のとき

　$1\leqq f(1)$　かつ　$f(1)\leqq 1$　より　$f(1)=1$ ……⑤

④，⑤より　放物線 $y=f(x)$ は　$x=0,\ 1$ で $y=1$ と交わる．

よって　$f(x)=ax(x-1)+1=ax^2-ax+1=a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{a}{4}+1$　とおけ，

③より　$a>0$ である．

②が成り立つのは，$y=f(x)$ の $x=1$ における接線の傾きが 1 以下のとき．

　$f'(x)=2ax-a$　より　$f'(1)=a$　　よって　$a\leqq 1$

このときグラフの対称性より　$1-x\leqq f(x)$　が成り立つ．

$0\leqq x\leqq 1$ で $1-2x\leqq 1-x$　より　$1-2x\leqq f(x)$　つまり①も成り立つ．

したがって　$0<a\leqq 1$

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(ax^2-ax+1)dx=\left[\frac{a}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2+x\right]_0^1=-\frac{1}{6}a+1$$

$0<a\leqq 1$ において　S は $a=1$ のとき最小値　$-\dfrac{1}{6}+1=\dfrac{5}{6}$　をとる．

したがって　$\boldsymbol{f(x)=x^2-x+1}$　　**最小値は** $\boldsymbol{\dfrac{5}{6}}$

3　空間内に三角形 ABC と定点 O を中心とする半径 1 の球面 S とがある．点 P が S 上のすべての点を動くときの　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$　の最大値，最小値をそれぞれ M，m とするとき，次の問いに答えよ．ただし，三角形 ABC の重心 G は　$\mathrm{OG}>1$　を満たすものとする．

(1)　$M=\mathrm{AQ}^2+\mathrm{BQ}^2+\mathrm{CQ}^2$　となる S 上の点を Q，$m=\mathrm{AR}^2+\mathrm{BR}^2+\mathrm{CR}^2$　となる S 上の点を R とするとき，3 点 Q，R，G は 1 直線上にあること示せ．

(2)　$\sqrt{M-(\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)}-\sqrt{m-(\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)}$ の値は三角形 ABC の形状および位置に無関係に定まることを示し，その値を求めよ．

---

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{r}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\vec{g}$　とおく．

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2&=|\vec{p}-\vec{a}|^2+|\vec{p}-\vec{b}|^2+|\vec{p}-\vec{c}|^2\\&=3|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\\&=3-6\vec{p}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\\&=-6\vec{p}\cdot\vec{g}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+3\end{aligned}$$

　よって　$\vec{p}\cdot\vec{g}$ の最大，最小を考える．$|\vec{p}|$，$|\vec{g}|$ は一定より，

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\vec{p}$ と $\vec{g}$ が同じ向きのとき $\vec{p}\cdot\vec{g}$ は最大．このとき　$\vec{p}=\vec{r}$

$\vec{p}$ と $\vec{g}$ が反対向きのとき $\vec{p}\cdot\vec{g}$ は最小．このとき　$\vec{p}=\vec{q}$

したがって　$\vec{q}$ は $\vec{g}$ と反対向き，$\vec{r}$ は $\vec{g}$ と同じ向きである．

ゆえに３点 Q，R，G は１直線上にある．

(2)　$(\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2)-(\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)$

$=|\overrightarrow{\mathrm{GP}}-\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GP}}-\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GP}}-\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2-(|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2)$

$=3|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{GP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}})$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{a}-\vec{g}+\vec{b}-\vec{g}+\vec{c}-\vec{g}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-3\vec{g}=3\vec{g}-3\vec{g}=\vec{0}$　より

$(\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2)-(\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)=3|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|^2$

よって　$\sqrt{M-(\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)}=\sqrt{3|\overrightarrow{\mathrm{GQ}}|^2}=\sqrt{3}\,|\overrightarrow{\mathrm{GQ}}|$

$\sqrt{m-(\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)}=\sqrt{3|\overrightarrow{\mathrm{GR}}|^2}=\sqrt{3}\,|\overrightarrow{\mathrm{GR}}|$　より

求める値は $\sqrt{3}\,(|\overrightarrow{\mathrm{GQ}}|-|\overrightarrow{\mathrm{GR}}|)=\sqrt{3}\times 2=\mathbf{2\sqrt{3}}$　**（＝一定）**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第45講　総合問題(13)

0，1，2，3，4，5　の6つの数字を重複せずに用いて，n 桁の整数を作る　$(n\leqq 6)$．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$n=3$，すなわち3桁の整数で，隣り合う数字の和がどれも5にならないような整数は **アイ** 通りである．

(2)　$n=4$，すなわち4桁の整数で，隣り合う数字の和がどれも3にならないような整数は **ウエオ** 通りである．

(1)　和が5になる2つの数字の組み合わせは　$(5,\ 0)$，$(4,\ 1)$，$(3,\ 2)$ である．

百の位は0以外の数で5通り．百の位で選んだ数字と十の位の数字の和が5にならない十の位の選び方は　4通り．同様に一の位の数字の選び方は3通り．

したがって，求める総数は　$5\cdot4\cdot3=\mathbf{60}$（通り）

(2)　4桁の整数は全部で $5\cdot5\cdot4\cdot3=300$（通り）　このうち，隣り合う数字の和が3になる箇所がある場合を考える．和が3になる2つの数字の組み合わせは　$(3,\ 0)$，$(2,\ 1)$ である．

(i)　和が3になる箇所が2つあるとき

その箇所は千と百の位，十と一の位の2つである．4桁に0，1，2，3の数字が入る．

千の位は1，2，3の3通り．その各々に対し，百の位の選び方は1通り．

十，一の位は残り2数の順列で2通り．　　よって　$3\times2=6$（通り）

(ii)　和が3になる箇所が1つのみのとき

千と百の位の和が3になるとき，千の位は3通り．その各々に対し，百の位は1通り．

十，一の位の数字は，残り4つの数字の順列から，和が3になる2数の順列を除いた

${}_4P_2-2!=4\cdot3-2=10$　通り．　　よって　$3\times10=30$（通り）

百と十の位の和が3になるとき

千の位は，百の位が0，3のときは4通り，1，2のときは3通り．

十の位は1通り，一の位は3通り．　　よって　$2\times4\times3+2\times3\times3=42$（通り）

十と一の位の和が3になるとき．

十の位が0，3のとき，一の位は1通り．千と百の位は　${}_4P_2-2!=10$（通り）

十の位が1，2のとき，一の位は1通り．

千の位が3のとき，百の位は4，5の2通り．

千の位が4，5のとき，百の位は3通り．

よって　$2\times10+2\times(1\times2+2\times3)=20+16=36$（通り）

以上より，求める総数は　$300-(6+30+42+36)=\mathbf{186}$（通り）

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。